結構動力分析講義

第　一　回

504792-1

社團法人 考友社 出版發行

第一篇　結構動力概要

第一講　結構動力概論

命題重點

壹、結論動力分析之基本目的

結構動力學係用來分析任何型式的結構物承受任意動態荷重所產生的位移，或應變、應力。所謂動態荷重即指該荷重的大小、方向、作用點都隨時間改變。

貳、荷重之型式

分析結構物之動態反應基本上有兩種不同的方法，即肯定分析與非肯定分析（deterministic & non-deterministic）。若荷重的時變（time history of loading）完全知道，稱為既定荷重（presciled dynamic loading）；對某一受既定荷重的結構動力反應分析，就稱為肯定分析。另一方面，荷重之時變情形不知道，須用統計方法來定義，此種荷重稱之為漫散荷重（random dynamic loading），此一受漫散荷重之結構分析稱之為非肯定分析。

參、動力問題的基本特性

(1)動力問題是隨時間而改變的，因外力與反應都隨時間而變。

(2)考慮“抵抗結構物加速度之慣性力”，即此時結構物之平衡關係式中，有外力、內彈性力與因結構物之加速度所引起之慣性力。

圖 1-1 表示靜荷重與動荷重基本上之不同點。

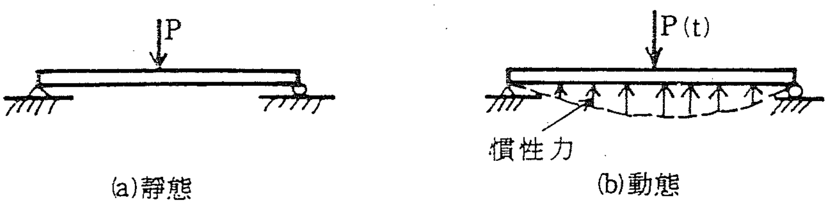


圖 1-1

肆、分離法（Discrete Method）

一、集中質量法

分析如圖 1-1 (b)的動力系統時，慣性力係由位移所引起，而位移又受慣性力大小之影響，且梁的質量是沿其長度作連續性分佈的，因此分析時需採用偏微分方程式，但是，如果將梁的質量集中在某些分離點上，如圖 1-2 所示，則分析問題時將大可簡化。

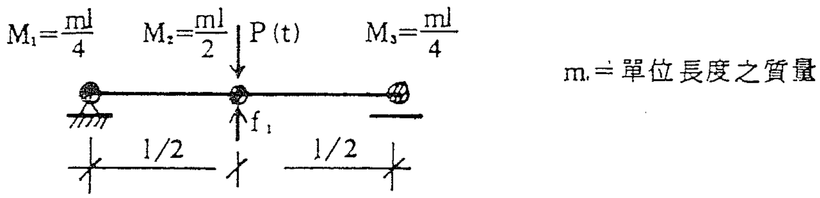
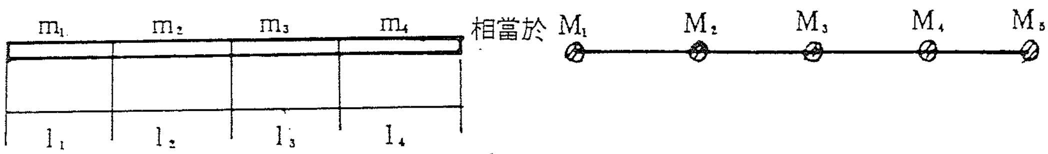


圖 1-2　簡支梁的集中質量法

一般對於較長之梁，其集中質量於某些分離節點之方法如圖 1-3 所示，若爲懸臂梁，則其集中質量法如圖 1-4 所示，所得自然振動頻率值與眞確值之誤差較小。



$$M_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1$$

$$M_2 = \frac{1}{2} (m_1 l_1 + m_2 l_2)$$

$$M_3 = \frac{1}{2} (m_2 l_2 + m_3 l_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_5 = \frac{1}{2} m_4 l_4$$

圖 1-3　長梁之集中質量法

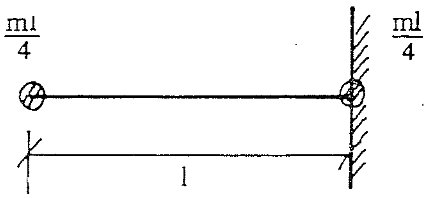


圖 1-4　懸臂梁之集中質量法

如欲表示一結構物之慣性效應，所需考慮位移分量的數目，稱爲該結構物之動自由度數（number of dynamic degrees of freedom）。

二、廣義位移法

如果系統的質量分佈均勻，可假設結構物的變形形狀可用一系列已知位移的和來表示，而這些位移形狀，就稱爲該結構物的位移座標。如圖 1-5 所示，梁的變形 v(x)，可表示成各別的正弦函數之和，即

$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$，正弦波之振幅 bn，即爲該系統的座標，而

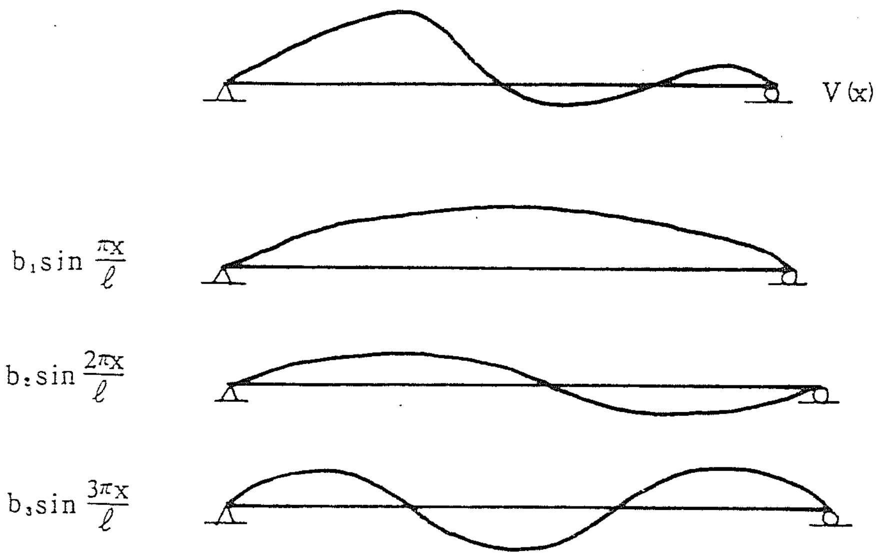


圖 1-5　以正弦函數和來表示簡支梁之變位形狀

吾人只用級數的前幾項就可對梁的眞正變形，作一良好的估計。

通常任何滿足幾何支承條件與能維持位移連續性之函數 $\varphi(x)$ 都可選用為變位形狀函數，對於一維結構物的位移（1－D）通式可寫為

$$v(x)=\sum_{n} Z_n \varphi_n(x) \tag{1-1}$$

$\varphi_n(x)$ 稱為位移函數，振幅 Z_n 稱為廣義座標（ generelized coordinates ）。於此法中，所選用位移函數之數目，即代表自由度數。

一般而言，用廣義位移法，亦稱為振態函數分析法（ shape-function method ）要此集中質量法為精確。

三、有限元素法

用有限多個分離式位移座標來表示任何結構物位移之方法，將結構物分為適當的幾個元素，各元素之交點即節點，節點之位移即該結構物的廣義座標。

定義變位形態在已知的某些節點位移上，並選擇一組類似前節所提位移函數之函數稱為插值函數（ intepolation functions），此一函數須具連續性且能滿足節點位移所加上的幾何位移條件。

有限元素法的優點為

(1)不論需要多少的廣義座標，只要將結構物分割成適當的元素即可。

(2)每一元素之插值函數相同，計算可以大大地簡化。

(3)每一節點位移只對相鄰的元素有影響，因此可簡化其求解過程。

伍、運動方程式的推導

在結構動力分析中，運動方程式的推導，可能是整個分析過程中最重要的一環。

(A) D'Alembert's 原理

質量的慣性力與其加速度成正比，而方向相反，稱爲 D'Alembert's 原理，利用此一原理可將運動方程式表示成“動平衡方程式”。

(B)虛位移原理

一系統在一組外力作用下維持平衡狀態，若有一符合系統束制條件的虛位移加入，而此一組外力所作的功爲零。此法在推導運動方程式時，先將作用在系統上各質量的所有外力（包括慣性力）予以標示，且每一動自由度都給予一虛位移，使系統所作的功等於零，即得運動方程式。

(C) Hamilton's 原理

爲避免使用向量之平衡方法，採用能量的變分法（variation），即在任一時段（t_1 與 t_2 間），動能與位能之變量，加上非保守力系所作動的變量令其爲零。

$$\int_{t_1}^{t_1} \delta (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta w_{nc} dt = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

T = 系統的總動能

V = 系統的總位能（包含應變能，任何保守力之位能）

W_{nc} = 作用在系統上非保守力所作之功（包括阻尼力，任意外力）。

δ = 某一時間間隔內的變量。

值得一提的是，若動能項T爲零，即爲Hamilton's原理在靜力學上之應用，上式積分式即與時間無關，可寫爲

$$\delta (V - W_{nc}) = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

此即爲著名的“最小位能原理”（minimum potential energy）。

第二篇　單自由度系統

第二講　運動方程式的推導

命　題　重　點

壹、線彈性結構系統（linearly elassic structural system）

如圖 2-1 所示爲一理想化之單自由度系統，其組件爲質量m之剛體，僅能作平移運動，勁度係數爲k之無質量彈簧提供抵抗位移之彈性力，阻尼盤（ damper ）C代表耗能機構，而使此一系統起動態反應之外擾動，爲隨時間而變之荷重p(t）。

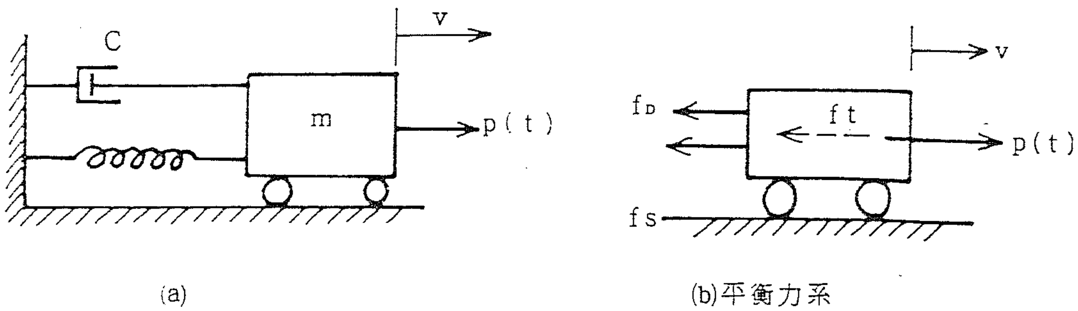


圖 2-1　理想化之單自由度系統

貳、推導法

一、力系平衡

由圖 2-1 知

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \qquad (2\text{-}1)$$

f_S ＝彈性力＝ kv

f_D ＝阻尼力＝ $c\dot{v}$（假設阻尼是粘滯性）

f_I ＝慣性力＝ $m\ddot{v}$（由D'Alembert's 原理知作用方向與 v相反）

所以單自由度系統之運動方程式為

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t) \qquad (2\text{-}2)$$

二、虛功法

如圖 2-1 (b)，f_I，f_D，f_S，$p(t)$ 表示作用在質量m上之外力，假如給予此m一虛位移 δv，則所有之外力均作功，系統之總功為

$$-f_I\delta v - f_D\delta v - f_S\delta v + p(t)\delta v = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

或

$$-[\, m\ddot{v} + c\dot{v} + kv - p(t)\,]\,\delta v = 0$$

因為 δv 不為零，所以可得

$$m\ddot{v} + cv + kv = 0$$

三、Hamilton's 原理之應用

如圖 2-1，系統之動能T，與位能V（即彈簧之應變能U）分別為

$$T = \frac{1}{2}m\dot{v}^2 \qquad (2\text{-}4a)$$

$$V = U = \frac{1}{2}kv^2 \qquad (2\text{-}4b)$$

系統之非保守力為阻尼力 f_D，作用外力 $p(t)$，此兩力所作功之變量為

$$\delta w_{nc} = p(t)\delta v - c\dot{v}\delta v \qquad (2\text{-}4c)$$