計算機數學講義

第　一　回

607695-1

社團·法人

WWW.EXAMINER.COM

社團法人 考友社 出版發行

計算機數學講義　第一回

目錄

第一講　基本理論

命題大綱

一、集合

㈠集合的基本概念

㈡集合代數

二、命題

㈠條件命題與雙條件命題

㈡命題公式

㈢恆真與恆假

三、函數、遞迴和歸納

㈠函數基本概念

㈡函數與關係

㈢多變數的函數

㈣遞迴函數

㈤數學歸納法

四、布林代數

㈠基本定理

㈡表示法

五、關係與計數

㈠關係

㈡計數

重點整理

一、集合

㈠集合的基本概念：

1.集合與元素：

⑴是一種不可精確定義的最基本的數學概念。就一般而言，凡是具有某種特殊性質的客體的聚合，都可稱為集合。

⑵字詞「客體」的含義，甚至包括抽象的客體。例如：

①全體中國公民的集合。

②平面上點的全體。

③一副棋子。

⑶成員關係的概念：

①是集合論的主要概念之一。屬於給定集合的任何客體，稱為該集合的成員或元素。

②依據某些規則，若能明確的判定，任何給定的客體是否是某個集合的成員，則稱該集合為良定集合。

③常用大寫英文字母表示集合，用小寫英文字母表示集合的元素。若 a 為集合 S 的元素，則可將這種成員關係表示成 $a \in S$，並讀作「a 屬於集合 S」，「a 是集合 S 的元素」或「a 在 S 中」。

④若客體 b 不屬於集合 S，則可記作 $b \notin S$，，它等價於命題「b 屬於集合 S」的否定，亦即：$\neg(b \in S) \Leftrightarrow b \notin S$。

⑷集合 S 中的不同的元素的數目，可稱為集合 S 的基數或勢：

①通常記作#S 或 $|S|$。集合的基數，可能是有限的，也可能是無限的。

②若基數#S 是有限的，則稱 S 是個有窮集合；若基數#S 是無限的，則稱 S 是個無窮集合。

③例如，經常出現的有窮集合有 1 與 m 間的正整數集合，其中包括有 1 與 m，$m \geq 1$，即$\{1，2，\cdots\cdots，m\}$。

④常見的無窮集合有 N 自然數集合或非負整數集合$\{0，1，2，\cdots\cdots\}$。

⑸由上述實例說明，可用集合的各成員來確定一個集合：

①列舉出所有的元素，就能明確的確定有窮集合，其方法是將各元素都列舉在大括號之內，並用逗點分開。

②由命題的眞值 T 與 F 構成的集合 S，一般可表示成 S={T，F}。其中，符號意指 S 就是集合{T，F}。對無窮集合而言，有時就無法列舉它的所有元素，故不能用以上方法來確定無窮集合。

③但尙可用謂詞公式來確定集合。顯然，客體域中能使謂詞爲眞的那些元素，確定一個集合，因這些元素都具有某種特殊性質。

④若 P(x)是個含有一個自由變元的謂詞公式，則集合{x | P(x)}定義集合 S，並可表達成 S={x|P(x)}

(6)由此可見，P(c)的眞值爲眞，若且唯若 c∈S。其中，P(x)爲欲使 x 屬於 S 所必需滿足的條件，常稱爲入集條件。例如：

①S1={x | x∈1 x>10}。

②S2={x | y∈1 x = 2y }。

③S3={x | x 是台中的公司}。

④S1 是大於 10 的整數集合，S2 是個偶數集合。S1 與 S2 都是無窮集合。

⑤S3 是個有窮集合。用謂詞公式，也能刻劃由列舉元素法所規定的集合。

⑥可將集合 S={T,F}表達成 S={x | (x=T)∨(x=F)}。

(7)用謂詞公式能刻劃任何集合，但爲直觀明顯起見，經常採用另外一種方法確定集合。例如：

① S1={0，1，-1，2，-2，…}。

② S2={2，4，6，…，18}。

(8)由寫出的元素與元素間的關係中，可判斷所出略去的元素：

①由以上對集合的描述能看出，對給定集合 S 與某個客體 c 而言，或 c∈S 或 c∉S，但是不能有 c∈S 同時又有 c∉S。

②在此的集合描述中，允許集合中有相同的元素：但認爲相同的元素，是同一個元素。另外，經常曾遇到這種情況，一個集合的元素，它本身又是一個集合。例如：

S ={a.{1，2},P,{q}}

(9)必須將集合{q}與元素 q 區別開來：

①集合{q}是集合 S 的一個元素，而 q 是集合{q}的元素，但它不是 S 的元素，亦即 q∈{q}，{q}∈S，但是 q∉S。

②必須把以某個客體 q 爲其僅有的一個元素的集合，亦即單元素集

合{q}，與 q 本身區別開來。

③例如：

設 i 是「小明」，C 是臺灣公民的集合，U 是參加聯合國的成員國集合，於是應有 $i\in C$，$C\in U$。但 $i\notin U$。因「小明」不是一個國家，他不可能是聯合國的成員。

2.集合間的關係：

相等與包含是集合間的兩種基本關係，也是集合論中的兩個基本概念。以下，先給出兩個集合間的相等關係的定義。

(1)【定義】：

給定兩個集合 A 與 B，即定義若且唯若 A 與 B 具有同樣的成員 A 等於 B 也就是說，若且唯若 A 的每一個元素都是 B 的一個元素，B 的每一個元素也都是 A 的一個元素，A 與 B 才是相等的，並記作 A=B。否則，稱集合 A 與 B 是不相等的，並記作 $A\neq B$。

①於是，可將這個定義表達成：

A.$(A=B)\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A$ 若且唯若 $x\in B)$或

B.$(A=B)\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\Rightarrow x\in B)\ \ (\forall x)(x\in B\Rightarrow x\in A)$

②以下將列舉若干實例，用來說明集合間的相等與不相等：

A.$\{a,b,c\}=\{c,b,a\}=\{a,c,b\}=\{a,a,b,c,c\}$。

B.設 $P=\{\{a,b\},c\}$與 $Q=\{a,b,c\}$，於是 $P\neq Q$。

C.設 $A=\{x\mid x(x-1)=0\}$與 $B=\{0，1\}$，於是有 A=B。

例 A 到例 C 說明，若兩個集合具同樣的元素，無論規定這些集合的方法如何，它們總是相等的。

③確定同一個集合，既可採用明顯的方法，又可採用暗含的方法。甚至可用不同的謂詞公式，以確定同一個集合。以下定義集合間的包含關係。

(2)【定義】：

設 A 與 B 是任意兩個集合。若集合 A 的每一個元素，都是集合 B 的一個元素，則稱 A 是 B 的子集，或 A 被包含於 B 中，或說 B 包含 A，並記作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。若集合 B 不包含集合 A，則可將它表示成 $A\not\subset B$ 或 $B\not\subset A$。

①尚可將以上的定義表示成：$A\subseteq B\Leftrightarrow(\forall X)(X\ni A\Rightarrow X\ni B)\Leftrightarrow$ B 包含 A。

②【例】：

設集合 A={a，b}與 B={a，b，c}。於是，應有 A 包含於 B。另外，{a，b}不包含{a，c，d，e}。

♥精選試題♥

一、證明 1(1!)+2(2!)+3(3!)+…+n(n!)=(n+1)!-1 成立。

答：n=1 時，1(1!)=(1+1)!-1 成立，

假設 n=k 成立，1(1!)+2(2!)+3(3!)+…+k(k!)=(k+1)!-1 成立，

考慮 n=k+1，

1(1!)+2(2!)+...+k(k!)+(k+1)[(k+1)!]

=[(k+1)!-1]+(k+1)[(k+1)!]=(k+2)[(k+1)!]-1=(k+2)!-1，

所以 n=k+1 亦成立，得證。

二、驗證 $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ 可以被 9 整除，這裡的 $n\geq 1$。

答：n=1 時，$1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=36$ 可以被 9 整除，成立。

假設 n=k 成立，即 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ 可以被 9 整除。

考慮 n=k+1，

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+(k^3+9k^2+27k+27)$

$=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3)$

因為 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ 可以被 9 整除，且 $9(k^2+3k+3)$ 也可被 9 整除，所以原式 $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ 可以被 9 整除，

因此 n=k+1 也成立，得證。

三、投擲硬幣時我們會得到正面及反面兩種結果，當我們投擲 5 次時會有 2^5 種可能結果，如果連丟 5 次銅板，不出現連續 head 的方法數有多少？

答：假設 a_n 表示丟 n 次銅板不出現連續 head 的方法數，考慮第 1 次丟的銅板，若第 1 次丟的銅板是 tail，則後面 n-1 次丟的銅板需不含連續的 head，其方法數為 a_{n-1}，若第 1 次丟的銅板為 head，則第 2 次必須為 tail，那後面 n-2 次丟的銅板不含連續 head 的方法數為 a_{n-2}，所以 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，另外當丟 1 次銅板時，不會出現連續的 head，所以 $a_1=2$，當丟 2 次銅板時，不出現連續 head，可能出現 HT、、TH、TT 共 3 種，所以 $a_2=3$，所以得遞迴關係式如下：

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \\ a_1=2, a_2=3 \end{cases}$$，可依序求得 $a_5=13$。