

數 學 講 義

第 一 回

151100-1



社團
法人
考
試
法

考
友
社

出版
發行

數學講義 第一回 目錄

第一回 (1/2)

第一講 數、數列、級數與極限·····	1
命題重點·····	1
重點整理·····	2
一、基礎概念·····	2
二、數·····	13
三、數列、級數與極限·····	17
精選試題·····	30

第一回 (2/2)

第二講 不等式與多項式·····	1
命題重點·····	1
重點整理·····	2
一、不等式·····	2
二、多項式·····	12
精選試題·····	32

第一講 數、數列、級數與極限

命題重點

- 一、基礎概念
 - (一) 數學邏輯
 - (二) 條件命題
 - (三) 集合
 - (四) 函數
- 二、數
 - (一) 自然數
 - (二) 有理數與無理數
 - (三) 實數
 - (四) 絕對值
 - (五) 複數
- 三、數列、極數與極限
 - (一) 等差數列與等比數列
 - (二) 一般數列
 - (三) 無窮數列與級數斂散性之判別
 - (四) 公式運算
 - (五) 極限值
 - (六) 數學歸納法

重點整理

一、基礎概念

(一)數學邏輯：

1.真假值的判別：

- (1)「 $A \wedge B$ 」為真——表示“ A 與 B 每一為真”。
- (2)「 $A \vee B$ 」為真——表示“ A 與 B 有一為真”。
- (3)「若 A ，則 B 」恆真是——當 A 恆偽時，或當 B 恆真時。

範例：設 $x \in R$ ，敘述“若 $(x+1)(x+2)=0$ ，則 $x=3$ ”為真，則下列何者為滿足此命題之集合：(A) R (B) $\{-1, -2\}$ (C) $\{3\}$ (D) $R - \{3\}$
 (E) $R - \{-1, -2\}$ 。

解析： $(x+1)(x+2)=0$ 為偽，或 $x=3$ 為真之故。∴選(C)(E)。

2.同義命題：

(1) $A \rightarrow B \equiv \bar{B} \rightarrow \bar{A} \equiv \bar{A} \vee B \equiv B \vee \bar{A}$ 配合使用下列公式。

- ① $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$ ② $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$ ③ $\overline{A \rightarrow B} \equiv A \wedge \bar{B} \equiv \bar{B} \wedge A$
 ④ $\overline{\forall x, P(x)} \equiv \exists x, \bar{P}(x)$ ⑤ $\overline{\exists x, P(x)} \equiv \forall x, \bar{P}(x)$

(2)常用符號：

符號	p, q	$\bar{p}(\sim p)$	T	F	\equiv	\wedge	\vee	\forall	\exists	\Rightarrow
意義	敘述	否定	真	假	同義	且	或	每一	有一	使得
命題： \rightarrow 表“若…則…”； \leftrightarrow 表“若且唯若…則…”； \Rightarrow 表“蘊涵”										

(3)同義命題：具有相同的真假值者。

- ① $p \rightarrow q$ 恆真 $\equiv p$ 為假 $\equiv q$ 為真
 \equiv (若設定任意條件下 p 真後，均可推導出 q 亦真)。
- ② $p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$ (即： $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$)。
- ③ $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$ (即： $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$)。

(4)否定的同義命題：

- ① $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$ (即： $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$)。

$$\textcircled{2} \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \quad \text{〔即：} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \text{〕}。$$

$$\textcircled{3} \overline{(p \rightarrow q)} \equiv p \wedge \overline{q} \quad \text{〔即：} \sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q) \text{〕}。$$

$$\textcircled{4} \overline{\forall x, p(x)} \equiv \exists x, \overline{p(x)} \quad \text{〔即：} \sim(\forall x, p(x)) \equiv \exists x, (\sim p(x)) \text{〕}。$$

$$\textcircled{5} \overline{\exists x, p(x)} \equiv \forall x, \overline{p(x)} \quad \text{〔即：} \sim(\exists x, p(x)) \equiv \forall x, (\sim p(x)) \text{〕}。$$

範例：(1) 設 $a, b \in R$ ，則 $a = b = 0$ 為 $a + b = 0$ 之 (A) 必要條件 (B) 充分條件 (C) 充要條件。

(2) $x = 3$ 且 $y = 5$ 為 $x + y = 8$ 的 (A) 充分條件 (B) 必要條件 (C) 充要條件。

解析：(1) $a = b = 0 \Rightarrow a + b = 0$ 成立

但 $a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ 不一定成立

故選(B)充分條件

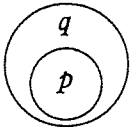
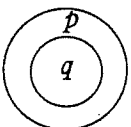
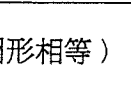
(2) $x = 3, y = 5 \Rightarrow x + y = 8$ 成立

但 $x + y = 8 \Rightarrow x = 3$ 且 $y = 5$ 不一定成立

故選(A)充分條件

(二) 條件命題：

1. 利用雙箭頭保證法：必須輔以配方法與代入法解題之
2. 利用集合作圖法：必須配合二元不等式之圖形解題之。

條件種類	判別方法	方法一：畫雙箭頭法	方法二：集合作圖法
p 為 q 之充分條件		$p \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{一定成立}} \\ \xleftarrow{\text{不一定成立}} \end{array} q$	$p \subset q$ 
p 為 q 之必要條件		$p \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{不一定成立}} \\ \xrightarrow{\text{一定成立}} \end{array} q$	$p \supset q$ 
p 為 q 之充要條件		$p \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{一定成立}} \\ \xleftarrow{\text{一定成立}} \end{array} q$	$p = q$ (圖形相等) 

範例：欲證命題「若 A 則 B 」亦即證明下列何命題？ (A) 若非 A 則非 B (B) 若 B 則非 A (C) 若非 B 則 A (D) 若非 B 則非 A 。

解析：由對偶命題知 $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$

精選試題

- (B) 1. 設 a, b, x, y 均為正有理數, 且 $a > b, x > y, A = \frac{a}{b}, B = \frac{b}{a}, C = \frac{a+x}{b+x}, D = \frac{a+y}{b+y}, E = \frac{b+x}{a+x}, F = \frac{b+y}{a+y}$, 則 A, B, C, D, E, F 之大小順序為
 (A) $C > D > A > B > F > E$
 (B) $A > D > C > E > F > B$
 (C) $C > D > A > E > F > B$
 (D) $A > D > C > B > F > E$
 (E) $B > F > E > A > D > C$.
- (C) 2. 若 $\sqrt{55 + \sqrt{55}}$ 介於兩正整數 a 及 $a+1$ 之間, 則 a 之值為
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9.
- (A) 3. 若 $\sqrt{17 + \sqrt{288}}$ 的正小數部分為 x , 則 $\frac{\sqrt{x+2 + \sqrt{4x+x^2}}}{\sqrt{x+2 - \sqrt{4x+x^2}}}$ 之值為
 (A) $\sqrt{2} + 1$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) $\sqrt{3} + 2$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{3}$.
- (D) 4. 若將 $\frac{2}{7}$ 化成小數時, 則小數點後第 100 位數字為
 (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 7 (E) 8.
- (B) 5. 下列各數中, 何者最大?
 (A) $0.35\bar{3}$ (B) $0.35\bar{3}$ (C) $0.35\bar{3}$ (D) 0.353 (E) 0.3533 .
- (B) 6. 一個無窮等比級數的首項為 $0.\bar{3}$, 第二項為 $0.2\bar{7}$, 則此無窮等比級數的總和為 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{5}{3}$.
- (C) 7. 無窮等比級數的和 $\frac{9}{2}$, $a_2 = -2$, 又 $|S_n - \frac{9}{2}| < \frac{1}{10^n}$, 已知 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, 則自然數 n 的最小值為
 (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12.
- (B) 8. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+4+\dots+n}{n^2+n+2}$ 之值為 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 3.
- (A) 9. 設 a_n 為 15^n 之正因數總和, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{15^n} =$
 (A) $\frac{15}{8}$ (B) $\frac{8}{15}$ (C) $\frac{4}{15}$ (D) $\frac{8}{225}$ (E) $\frac{4}{225}$.
- (B) 10. 化簡 $1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n)$ 為

- (A) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (B) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (C) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$
 (D) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (E) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.
- (C) 11. 化簡 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$ 為
 (A) $\frac{n}{n+1}$ (B) $\frac{n}{n+2}$ (C) $\frac{2n}{n+1}$ (D) $\frac{2n}{n+2}$ (E) $\frac{n}{2n+1}$.
- (C) 12. 化簡 $\frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125} + \dots + \frac{n+1}{5^{n+1}}$ 為
 (A) $\frac{5^{n+2}-4n+9}{4^2 \cdot 5^{n+1}}$ (B) $\frac{5^{n+2}+4n-9}{4^2 \cdot 5^{n+1}}$ (C) $\frac{5^{n+2}-4n-9}{4^2 \cdot 5^{n+1}}$ (D) $\frac{5^{n+2}+4n+9}{4^2 \cdot 5^{n+1}}$
 (E) $\frac{-5^{n+2}-4n+9}{4^2 \cdot 5^{n+1}}$.
- (A) 13. 設 $n \in N$, 若 n 除以 13 餘 6, 則 $n^2 - 3n + 2$ 除以 13 的餘數為
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11.
- (D) 14. 設 $x, y \in N$, 則滿足 $1260x = y^3$ 式中的 y 之最小值為
 (A) 120 (B) 140 (C) 180 (D) 210 (E) 240.
- (C) 15. 下列五數中, 何者為質數? (A) 221 (B) 323 (C) 331 (D) 399 (E) 483.
- (E) 16. 設 $x, y \in N$, 且 $xy = 5400$, 若 x, y 均為偶數, 則數對 (x, y) 共有幾組解? (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24.
- (A) 17. 設 $n \in N$, 則 $21n + 4$ 與 $14n + 3$ 的最大公因數為
 (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 7 (E) 42.
- (C) 18. 設 $a, b \in R$, 則 $a < 0, b < 0$ 為 $ab > 0, a + b < 0$ 的何種條件?
 (A) 充分條件 (B) 必要條件 (C) 充要條件 (D) 非充分亦非必要條件.
- (D) 19. 設 $a, b \in R$, 則 $a > 0$ 或 $b > 0$ 為 $ab > 0$ 的何種條件?
 (A) 充分條件 (B) 必要條件 (C) 充要條件 (D) 非充分亦非必要條件.
- (B) 20. 設 $a, b \in R$, 則 $a + b = 0$ 為 $|a| + |b| = 0$ 的何種條件?
 (A) 充分條件 (B) 必要條件 (C) 充要條件 (D) 非充分亦非必要條件.
- (B) 21. 四邊形 $ABCD$ 中, 四個角都是直角為四邊形 $ABCD$ 是正方形的何種條件?
 (A) 充分條件 (B) 必要條件 (C) 充要條件 (D) 非充分亦非必要條件.
- (E) 22. 計算 $\frac{(1 + \frac{11}{2}) \cdot (1 + \frac{11}{3}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{11}{11})}{(1 + \frac{13}{2}) \cdot (1 + \frac{13}{3}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{13}{13})}$ 之值, 用最簡分數表示為
 (A) $\frac{13}{575}$ (B) $\frac{13}{100}$ (C) $\frac{7}{100}$ (D) $\frac{91}{2300}$ (E) $\frac{91}{1150}$.
- (C) 23. 設 $x, y \in R, |x| < 1, |\frac{x-y}{1-xy}| < 1$, 則 y 值的範圍為