線性代數講義

第　一　回

106600-1

社團法人 考友社 出版發行

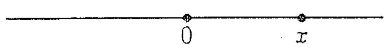
第一講 向 量

命 題 重 點

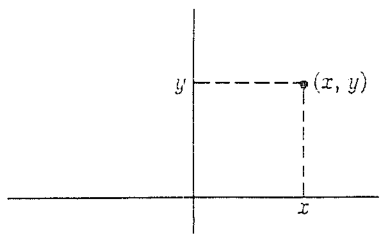
壹、N維空間中點的定義

我們知道只要選定單位長，就能以一數來表示線上的一點。

一數對（ x ， y ）能用來表示平面上的一點。這些表法可由下列圖形來說明。



(a) 直線上的點



(b) 平面上的點

圖 1

一個三重數（ x ， y ， z ），可以用來表示 3 維空間中的一點。我們只需在平面上多加另一軸。舉例說明如下圖。

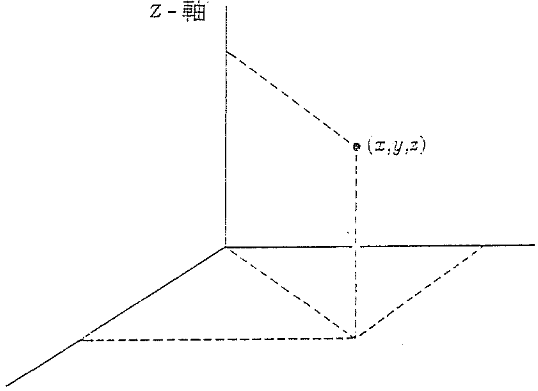


圖 2

我們亦可用（ x_1 ， x_2 ， x_3 ）來代替（ x ， y ， z ）。線可稱爲 1 維空間，而平面可稱爲 2 維空間。

因此我們可用單獨一個數代表 1 維空間中的一點。用一數對代表 2 維空間中的一點。三重數代表 3 維空間中的一點。

雖然我們不能更進一步的描圖，但我們仍可將四重數

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

想像爲 4 維空間中的一點，五重數爲 5 維空間中的一點。同樣六重數，七重數……亦可類推。

我們定義一個在 n 維空間的點爲一 n 重數

$$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n),$$

此處 n 爲正整數。我們以大寫字母 X 表 n 重數，同時以小寫字母表數，以大寫字母表點。我們稱 x_1 ， x_2 ，……， x_n 爲點 X 的**坐標**。例如在 3 維空間中，2 爲點（ 2 ， 3 ，－ 4 ）的第一坐標，而－ 4 爲第三坐標。

本文中我們大多數的例子都是取 $n = 2$ 或 $n = 3$ 的情形。然而讀者必須瞭解兩點：㈠實際上假設 $n = 2$ 或 $n = 3$ 並不能使公式或定理更簡單。㈡在物理學上的確發生 $n = 4$ 的情形，且在實際或理論上常出現 $n = n$ 的情形。再者，我們的部分目的也是要顯示，在一般的情形也是與 $n = 2$ 或 $n = 3$ 時相似。

例題　我們所居住的空間就是一個 3 維空間的典型例子。只要我們選定一個原點及坐標系，則我們就可利用三個坐標值來描出點的位置。在很早以前，我們就知道將 3 維空間加入一個第四坐標——時間，是相當方便的。而時間的起點可任意選定，如基督的誕生（亦可選太陽系的誕生，或地球的誕生爲起點，只要我們能精確的決定卽可），

則一點的時間坐標若為負則為紀元前，而正時間坐標的點為紀元後。

但勿有"時間就是第4維空間"的觀念。上述4維空間的例子僅是一個可能的例子而已。例如在經濟學上，將企業花費金錢的數目當作坐標，就用到了一個非常不同的空間。例如我們可用下列企業作為對應坐標來處理一個7維空間：

1.鋼鐵　2.汽車　3.農產品　4.魚
5.化學品　6.衣服　7.運輸

我們每年以百萬為衡量的單位，則點（1000，800，550，300，700，200，900）在7維空間裡的意義是鋼鐵企業每年花費十億元，而化學品企業為七億元。

現在我們來定義點的加法，若A，B為兩點，

$$A=(a_1,\cdots\cdots,a_n),\quad B=(b_1,\cdots\cdots,b_n),$$

則定義$A+B$為

$$(a_1+b_1,\cdots\cdots,a_n+b_n).$$

例如，若$A=(1,2)$，$B=(-3,5)$，　則　$A+B=(-2,7)$。在3維空間若$A=(-1,\pi,3)$，$B=(\sqrt{2},7,-2)$，則

$$A+B=(\sqrt{2}-1,\pi+7,1)$$

再者，若c是任一數，我們定義點cA的坐標為

$$(ca_1,\cdots\cdots,ca_n).$$

若　$A=(2,-1,5)$，$c=7$，則$cA=(14,-7,35)$

由上述的定義，我們知道加法滿足下列的規則：

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(2) $A+B=B+A$

(3) $c(A+B)=cA+cB$

(4)若 c_1 ， c_2 爲數，則

$$(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A \text{ 且 } (c_1c_2)A=c_1(c_2A)$$

(5)若令 $O=(0,\cdots\cdots,0)$ 爲一點，而其坐標皆爲 0 ，則

$O+A=A+O=A$ 對所有的 A 都成立。

(6) $1\cdot A=A$ ，且若以 $-A$ 表 $(-1)A$ ，則 $A+(-A)=O$

〔通常我們以 $A-B$ 代表 $A+(-B)$ 〕。

這些性質都很容易證明，我們建議考友以實例來證明它們。在此僅對性質(3)作詳細的證明。

令 $A=(a_1,\cdots\cdots,a_n)$ ， $B=(b_1,\cdots\cdots,b_n)$。則

$$A+B=(a_1+b_1,\cdots\cdots,a_n+b_n)$$

且

$$\begin{aligned} c(A+B) &= (c(a_1+b_1),\cdots\cdots,c(a_n+b_n)) \\ &= (ca_1+cb_1,\cdots\cdots,ca_n+cb_n) \\ &= cA+cB \end{aligned}$$

由 n 重數的加法定義得知最後一步爲眞。

注意 勿將數 0 和 n 重數 $(0,0,\cdots\cdots,0)$ 混淆。通常我們以 O 表 n 重數 $(0,0,\cdots\cdots,0)$ ，亦將其稱爲零。因爲在實用上不致於發生混淆。

現在我們藉著數在平面上的幾何性質來解釋加法和乘法

例如，設 $A=(2,3)$ ，

$B=(-1,1)$。

則 $A+B=(1,4)$

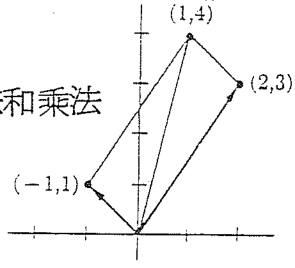


圖 3

圖形看起來像一個平行四邊形（圖3）

另外再擧例，設$A=(3,1)$，$B=(1,2)$。則$A+B=(4,3)$。
我們可再看到加法的幾何表示法，又像一個平行四邊形（圖4）。

若乘上一個數，則其所代表的是什麼？令$A=(1,2)$，$c=3$，則$cA=(3,6)$，如圖5(a)

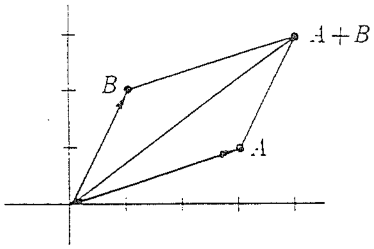
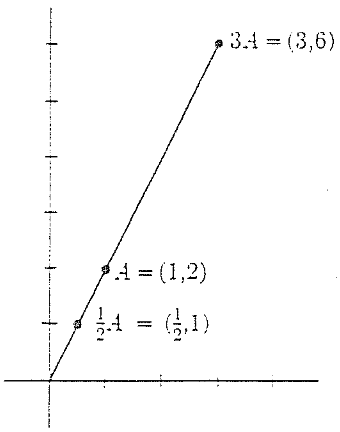
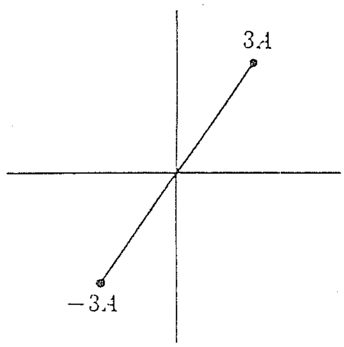


圖 4



(a)



(b)

圖 5

乘上3，即將A的長度延伸3倍。同樣地$1/2\ A$將A的長度縮短1/2倍，即將A縮短爲原來的一半。一般而言，若t是一個數，$t>0$，我們說tA是與A相同方向的點，但與原點的距離爲A的t倍。

反之，乘上一個負數則得相反的方向，$-3A$如圖5(b)所示。

貳、向量位置

我們定義**位置向量**爲一有序點對，其表示法爲$\overrightarrow{AB}$（此不爲一乘

積）。A稱為位置向量的起點，B為其終點，如圖6

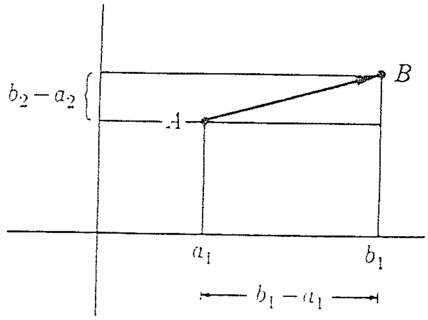


圖 6

B的坐標如何由A的坐標求得呢？我們由平面中觀察得

$$b_1 = a_1 + (b_1 - a_1)$$

同樣的

$$b_2 = a_2 + (b_2 - a_2)$$

即

$$B = A + (B - A)$$

令 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 為兩位置向量，若 $B-A=D-C$ 則我們說它們等價，每一位置向量等價於起點為原點的一個位置向量，蓋因 $\overrightarrow{AB}$ 等價於 $\overrightarrow{O(B-A)}$。很明顯地，這是唯一起點為原點且等價於 $\overrightarrow{AB}$ 的位置向量。若你能想到平面上的平行四邊形定律，則位置向量的等價關係可用幾何來解釋；若兩點對所定的線段長度相等，且所指的方向相同，則兩位置向量等價。

在下圖中我們描繪出位置向量 $\overrightarrow{O(B-A)}$，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{O(A-B)}$，$\overrightarrow{BA}$

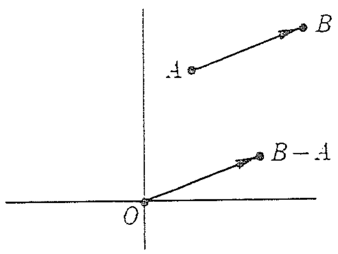


圖 7

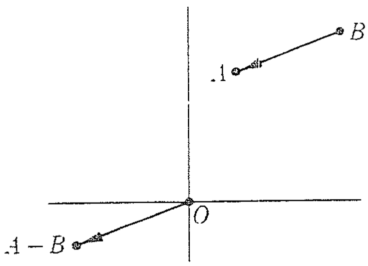
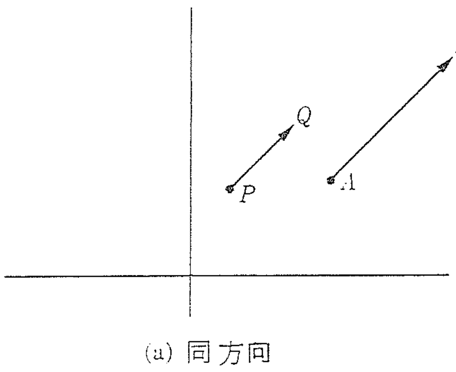


圖 8

以原點爲起點的位置向量 $\overrightarrow{OC}$ ，我們稱之爲**坐落在原點**的向量 。任一位置向量 $\overrightarrow{AB}$ 稱爲**坐落在** A **點**的向量 。

坐落在原點的位置向量，完全由其終點來決定。以此觀點，我們可稱 n 重數爲 n 維點或向量 。

兩個位置向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{PQ}$ ，如果存在 $c \neq 0$ 使得（ $B-A$ ）＝ c （ $Q-P$ ），則稱爲**平行**。若 $c>0$ 則爲**同方向**，$c<0$ 則**反方向**。如下圖：



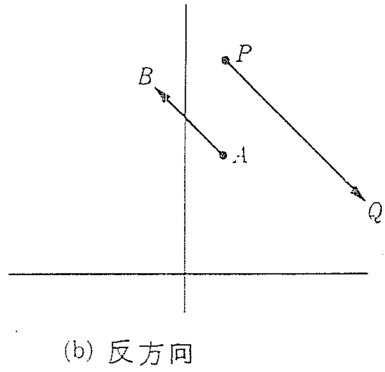


圖 9

用類似的方法，任一關於 n 維點的定義，皆能夠適用於位置向量。例如在下一文，我們將定義 n 維點相垂直的意義。如 $B-A$ 垂直於 $Q-P$ ，則我們稱兩位置向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{PQ}$ 互相垂直 。我們將平面中的情形繪於下圖中 。

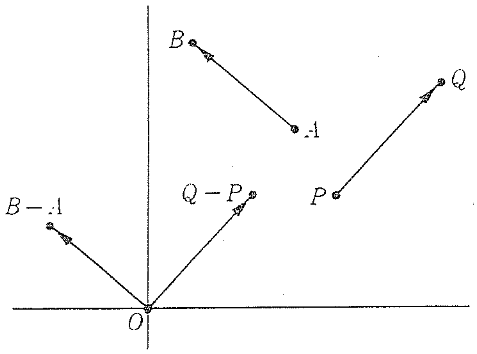


圖 10