微積分講義

第一回

10659A-1

社團法人 WWW.EXAMINER.COM

社團法人 考友社 出版發行

微積分講義　第一回　目錄

第一回（1/2）

第一回（2/2）

第一講　極限與連續

命題重點

一、極限定義與運算

(一)極限定義

(二)極限的基本運算

(三)分式型多項式不定型

(四)無理式分式不定型

二、無窮極限

(一)無窮極限的定義

(二)分式型的無窮極限

(三)無理式分式型的無窮極限

(四)欲求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 之值

(五)欲求 $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 之值

三、夾擠定理

(一)夾擠定理（又稱三明治定理）

(二)分段式定義求極限

四、三角函數求極限

(一) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\theta}{\sin\theta}=1$

(二) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{\tan\theta} = 1$

(三) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$

(四) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \dfrac{1}{2}$

五、極限連續

六、極限之証明

七、漸近線求法

(一)漸近線定義

(二)漸近線種類與特性

(三)漸近線求法

重點整理

一、極限定義與運算

(一)極限定義（Limit Defintion）：

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 的極限值爲 L，注意不一定每個函數 $f(x)$ 皆有極限值，須滿足下列定義方可稱爲極限值存在，即

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

如圖1-1所示

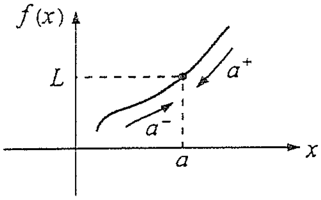

圖1-1

表示 x 由 a 的右邊 (比 a 大一點點，即 a^+) 趨近之值會等於 x 由 a 的左邊 (比 a 小一點點，即 a^-) 趨近的值，皆爲 L。

※說明：

1．由此可知極限具有唯一性 (皆爲 L)。

2．可知 $x \to a$ 所表示的意思爲很接近 a，但注意並不等於 a。

3．可知若 $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$，表示此極限不具有唯一性。即 $\lim_{x \to a} f(x)$ 不存在，如圖1-2所示，圖中 $L_1 \neq L_2$。

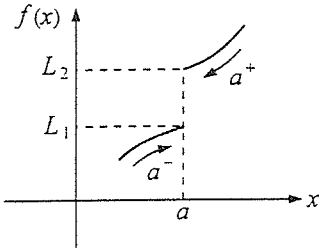

圖1-2

(二)極限的基本運算：

若已知 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$；$L$，$M \in R$，則

1．$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

2．$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

3．$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (但 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$)

4．$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

由上式可知極限可分開運算，但在分開的同時，須要在 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的極限值均存在方可，否則上述 4 個式子不成立。

(三)分式型多項式不定型：

型式為 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 而若把 $x = a$ 代入 $f(x)$ 與 $g(x)$，因而形成 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，若不經過處理，則不能求得答案，此即為不定型，解法步驟如下：

1．先行通分變成分式型

$\Downarrow$

2．把分子與分母因式分解並消去共同因式

$\Downarrow$

3．再把 $x = a$ 代入，即可求出極限值

※說明：

1．可知因式分解為求出極限值前的一個最重要步驟，茲提出重要因式分解公式如下：

精選試題

1. Prove that $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ does not exist at $x=0$。

答：(1) 當 $x=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 時，$\frac{1}{x}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

(2) 當 $x=\dfrac{1}{2n\pi}$ 時，$\frac{1}{x}=2n\pi$

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi\right)=0$$

由(1)(2)知 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

2.求 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\,\sin\left(e^{n}\pi\right)}{n+1}=?$

答：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\,\sin\left(e^{n}\pi\right)}{n+1}$ （分子、分母同 $\div\sqrt{n}$）

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left(e^{n}\pi\right)}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ （$\because \dfrac{\text{有限}}{\text{無限}}=0$）

$=0$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x}=?$

答：$\lim_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(3-\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$=3-1=2$

$=\frac{0}{0+1}=0$

7. Locate the discontinuities of the following functions and explain your answers

(1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ if $x \neq 0$, $f(0)=5$ 。

(2) $f(x)=\exp(1/x)$ if $x \neq 0$, $f(0)=0$ 。

答：(1) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \neq f(0)=5$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 處不連續

(2) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty \neq f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 處不連續。

8. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-4}-ax-b\right)=0$ 則 $a=?$, $b=?$

答：原式 $\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-4}-ax\right)=b$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+3x-4)-(ax)^2}{\sqrt{2x^2+3x-4}+ax}=b$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(2-a^2)x^2+3x-4}{\sqrt{2x^2+3x-4}+ax}=b$$

故 $2-a^2=0$ 即 $a=\pm\sqrt{2}$（負不合）

$a=\sqrt{2}$ 代回原式

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{2x^2+3x-4}+\sqrt{2}x}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=b$$

故 $a=\sqrt{2}$ $b=\frac{3}{2\sqrt{2}}$