微 積 分 講 義

第　一　回

10659B-1

社團法人 考友社 出版發行

微積分講義　第一回　目錄

第一講　極限與連續……1
命題重點……1
重點整理……3
一、預備知識……3
二、極限……6
三、不定型求極限……8
四、無窮極限……10
五、夾擠定理……13
六、高斯函數的極限……14
七、三角函數的極限……15
八、連續性……16
九、漸近線……18
精選試題……21

第一講　極限與連續

命題重點

一、預備知識

㈠微積分常用基本符號

㈡函數定義

㈢偶函數和奇函數

㈣反函數

㈤合成函數

㈥集合區間

二、極限

㈠極限定義

㈡ $\varepsilon - \delta$ 之極限定義法

㈢極限基本運算

㈣肯定型極限

三、不定型求極限

㈠分式多項式不定型

㈡無理式分式不定型

四、無窮極限

㈠符號說明

㈡多項式分式型之無窮極限

㈢極限求法

㈣極限其他重要定理

五、夾擠定理

㈠定理

㈡夾擠定理常用之技巧
㈢夾擠之應用定理

六、高斯函數的極限
㈠基本性質
㈡高斯性質
㈢高斯常見之題型

七、三角函數的極限

八、連續性
㈠連續之定義
㈡分段式連續之定義
㈢區間連續之定義
㈣極限與連續之相關性質

九、漸近線
㈠漸近線之定義
㈡漸近線之種類
㈢漸近線求法

重點整理

一、預備知識

(一) 微積分常用基本符號：

1.$\forall$：全部，對每一個 (for all)。

2.$\exists$：存在，至少存在一個 (exist)。

3.$\exists!$：唯一存在 (exist only one)。

4.$\Rightarrow$：則 (then)。

5.$\Leftrightarrow$：若且唯若；充要 (in and only if)。

6.$\in$：屬於 (belong to)。

7.$\subset$：包含於。

8.$\supset$：包含。

9.$\ni$：使得 (such that)。

10.R：實數系。

11.Q：有理數系。

12.Z：整數系。

13.$R\backslash Q$：無理數系，(其中 \ 爲去除)。

14.N：自然數系。

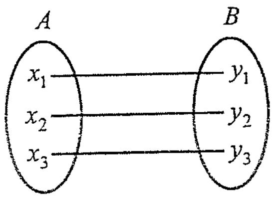
(二) 函數定義 (function)：

1.$f:A\to B$。

2.定義：函數 f 爲集合 A 中之任一元素 (element)，必有集合 B 中唯一元素與之對應，表示爲 $y=f(x)$。

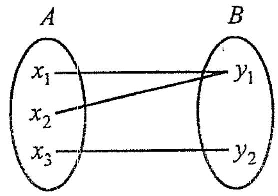
3.數學定義：$\forall x\in A$，$\exists! y\in B$，$\ni: y=f(x)$

4.圖示：函數表示可爲一對一，多對一，但不可一對多。



一對一

or



多對一

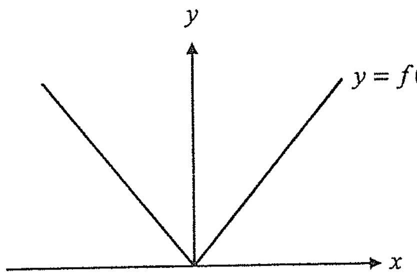
A 為定義域 (definition domain)

B 為值域 (value domain)

（三）偶函數 (even function) 和奇函數 (odd function)：

1.若 $f(x)=f(-x)$，則稱 $f(x)$ 爲偶函數。

例：

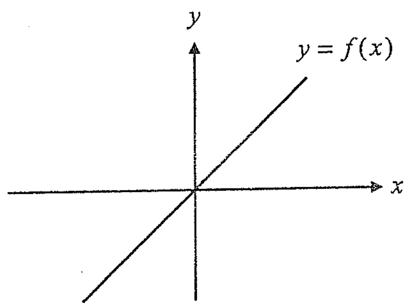


特性：(1) 圖形對稱 y 軸。

(2) $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 2$,$\int_{0}^{c} f(x)\,dx$ 。

2.若 $f(x)=-f(-x)$，則稱 $f(x)$ 爲奇函數。

例：



特性：(1) 圖形對稱原點。

(2) $\int_{-c}^{c} f(x)dx = 0$ 。

3.(1) 偶函數×偶函數＝偶函數。

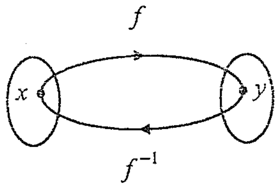
(2) 奇函數×奇函數＝偶函數。

(3) 奇函數×偶函數＝偶函數×奇函數＝奇函數。

(四) 反函數 (inverse function)：

1.定義：已知 $f: A \to B$，則定義 $f^{-1}: B \to A$ 稱爲反函數或可逆函數 (invertible function) 。

2.圖示： $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$



3.特性：(1) 爲一對一函數。

(2) $y = f(x) = f[f^{-1}(y)]$ 。

(3) $x = f^{-1}(y) = f^{-1}[f(x)]$ 。

(五) 合成函數 (composite function)：

1. $f \circ g = f(g(x))$

2. $g \circ f = g(f(x))$ ，其中∘：唸 circle

3. $f \circ g \neq g \circ f$

(六) 集合區間 (interval)：

1.有限區間 (finite interval)。

2.無窮區間 (infinite interval)。

如下例：

(1) $[a,b]=\{x\,|\,a\le x\le b\}$　　(2) $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$

(3) $[a,b)=\{x\,|\,a\le x<b\}$　　(4) $(a,b]=\{x\,|\,a<x\le b\}$

(5) $[a,\infty)=\{x\,|\,x\ge a\}$　　(6) $(a,\infty)=\{x\,|\,x>a\}$

(7) $(-\infty,a]=\{x\,|\,x\le a\}$　　(8) $(-\infty,\infty)=R$（實數系）

二、極限

(一) 極限定義（Limit definition）：

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

左單邊極限=右單邊極限值，則極限存在。

極限具有唯一性。

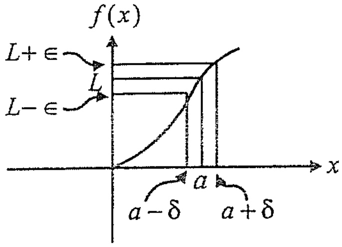
反之，若 $\lim_{x\to a^+} f(x)\ne \lim_{x\to a^-} f(x)$，則極限不存在。

(二) $\in-\delta$之極限定義法：

1. 當 $\lim_{x\to a} f(x)=L$之嚴謹定義：$\forall \in>0$，$\exists\delta(\in)>0$，

$\ni: 0<\left|x-a\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right|<\in$

(1) 如圖：



(2) 比証明的關鍵在於如何找到$\in$和δ之關係，使得証明成立，且 $\in$必須先給定，δ才產生。

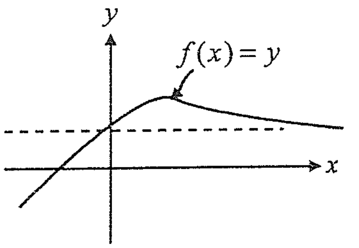
2. $\in k$之定義（即當 x 趨近於無窮大時之嚴謹定義）：

(1) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ： $\forall \in > 0$ ，$\exists k > 0$ ，$\ni : x > k$ 時

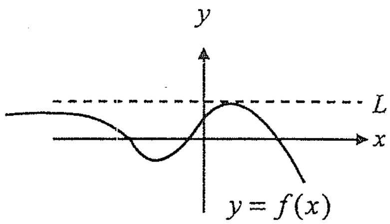
$\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \in$

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ ： $\forall \in > 0$ ，$\exists k > 0$ ，$\ni : x < -k$ 時

$\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \in$



圖(一)



圖(二)

3.無窮不存在定義法：

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \equiv \forall k > 0, \exists \delta > 0, \ni :$

$0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > k$

(2) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \equiv \forall k > 0, \exists \delta > 0, \ni :$

$-\delta < x - a < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > k$

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \equiv \forall k > 0$ ，$\exists \delta > 0, \ni : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > k$

(3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \equiv \forall k > 0, \exists \delta > 0, \ni :$

$0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -k$

(4) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \equiv \forall k > 0, \exists \delta > 0, \ni :$

$-\delta < x - a < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < -k$

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \equiv \forall k > 0$ ，$\exists \delta > 0, \ni : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$

4.極限証明之題型與求法：

(1) 欲利用 $\in - \delta$ 証明 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 之題型：

① 若 $\in$ 與 δ 之關係確定可由 $|f(x) - L| < \in$ 推得 $0 < |x - a| < \delta$ 而得一般像根號型，一次型皆屬之。

精選試題

(D)　1.若函數 f 在 $x=a$ 時連續，δ、ε 為正數，則下列何者為正確？

(A) 當 $|x-1|<\delta$ 則 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

(B) 當 $0<|x-a|<\delta$ 則 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

(C) 當 $0<|x-a|<\delta$ 則 $0<|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

(D) 以上皆非

(B)　2.設 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，則：

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=x$　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$　(C) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在　(D) 以上皆非

(B)　3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\cosh^{-1}x-\ln x)$ 之值為

(A) 2　(B) ln2　(C) 不存在　(D) 以上皆非

(A)　4. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}=a$，則 $a=$？

(D)　5.若 $f(x)=\frac{1}{1+2^{1/x}}$，$x\neq0$，則下列敘述，何者正確？

(A) $f(0)=0$，則 $f(x)$ 在 0 點連續

(B) $f(0)=\frac{1}{2}$，則 $f(x)$ 在 0 點連續

(C) $f(0)=1$，則 $f(x)$ 在 0 點連續

(D) $f(0)$ 為任何值，$f(x)$ 在 0 點皆不連續

(A)　6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x}=$

(A) 0　(B) 1　(C) -1　(D) 以上皆非

(B)　7.給一向量 $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)^t=(2, 3, 5, 6)^t$，

令 $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{4}|x_i|^p\right)^{1/p}$，則 $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=$

(A) 2　(B) 6　(C) $\sqrt{74}$　(D) 3

(D)　8. $g(x)=x^3/(x-\sin x)$，$x\neq0$，若 $g(x)$ 在 $x=0$ 為連續，則 $g(0)=$

(A) -1　(B) 0　(C) 4　(D) 6

(C)　9. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x^2-x-2}-\frac{1}{2x^2-5x+2}\right)=$

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{7}$　(C) $\frac{1}{9}$　(D) 不存在

(C)　10.求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}=$

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 2

(A) 11. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 不存在

(B) 12. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0\\ 1, & 0<x\leqslant 1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$

請找出 $f(x)$ 的不連續點:

(A) 0 (B) 1 (C) 0 和 1 (D) 不存在

(B) 13. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin(e^n\pi)}{n+1}=$

(A)發散 (B) 0 (C) 1 (D) -1

(B) 14. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right]$之值為:

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) 不存在

(A) 15. 下列敘述何者錯誤?

(A) 若 $f(c)$ 沒有定義，則 $\lim_{x\to c}f(x)$ 不存在

(B) 若 $0\leqslant f(x)\leqslant 3x^2+2x^4$ 對於所有實數 x 均成立，則 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

(C) 若 b 為一實數，且 $\lim_{x\to a}f(x)=b$，則 $\lim_{x\to a}|f(x)|=|b|$

(D) 若 $\lim_{x\to a}f(x)=L$，$\lim_{x\to a}f(x)=M$，且 L 與 M 均為實數，則 $L=M$

(A) 16. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=$

(A) 1 (B) 0 (C) ∞ (D) 不存在

(C) 17. 設 $f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x-1-\sqrt{2}}$，$x\neq 1+\sqrt{2}$，且 $f(x)$ 在 $x=1+\sqrt{2}$ 連續，

則 $f(1+\sqrt{2})=$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(B) 18. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=$ $(ab\neq 0)$

(A) $\frac{b}{a}$ (B) $\frac{a}{b}$ (C) 1 (D) 不存在

(B) 19. 若 $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 不存在

(D) 20. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2\sin x}{\sqrt{x^2-1}}=$