工程數學講義

第　一　回

106570-1

社團法人 考友社 出版發行

工程數學講義　第一回

目錄

第一講　微分方程式

命題重點

一、一階微分方程式
㈠基本觀念與名詞之介紹
㈡分離變數法
㈢一階正合微分方程式
㈣積分因子
㈤一階線性微分方程式
㈥柏努利方程式
㈦其他形式之一階常微分方程式
㈧一階常微分方程式之應用

二、高階微分方程式
㈠二階線性微分方程式概論
㈡二階常係數齊性微分方程式
㈢二階常係數非齊性微分方程式
㈣尤拉-柯西方程式
㈤高階線性微分方程式
㈥微分運算符號法
㈦線性微分方程式之應用
㈧聯立微分方程式及其應用

重點整理

一、一階微分方程式

(一)基本觀念與名詞之介紹：

凡表示自變數與應變數之間關係的數學式稱爲方程式，若方程式中包含有微分或導數者稱爲微分方程式 (Differential equation)，今分別敍述如下：

1. 分　類

(1)　常微分方程式 (Ordinary differential equation)

微分方程式中僅包含一個自變數，且其中之導數爲全導數者，例如

① $2\dfrac{dy}{dx}+3y=5x$

② $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=\cos x$

(2)　偏微分方程式 (Partial differential equation)

微分方程式中包含兩個或兩個以上之自變數，且其中之導數爲偏導數者，例如

① $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=5$

② $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=y$

其中 x, y 爲自變數，u 爲應變數。

(3)　全微分方程式 (Total differential equation)

微分方程式中包含有兩個或多個變數，且其中之微分爲全微分者，例如

$$y^2dx+zdy-ydz=0$$

(4) 聯立微分方程式 (Simultaneous differential equation)

微分方程式組中，自變數僅一個，而應變數兩個或兩個以上，且方程式之數目與應變數之數目相同者，稱爲聯立微分方程式，例如

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + 2\dfrac{dy}{dt} = t \\ 3\dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t} \end{cases}$$

其中 t 爲自變數，x, y 爲應變數。

2. 階與次

(1) 階 (Order)

以微分方程式中之最高導數名之。

(2) 次 (Degree)

微分方程式化成有理整式後，以最高階導數之次方名之。

例如

① $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{y} = 0$　一階二次常微分方程式

② $(y''')^2 + (y'')^3 + 5y = x^2$　三階二次常微分方程式

③ $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$　一階二次偏微分方程式

3. 線性與非線性

(1) 非線性微分方程式 (Non-linear differential equation)

微分方程式中具有下列任一情況者均屬之。

① 應變數非一次方，例如 $y'' + 5\sqrt{y} = \sin x$，或 $y'' + 2y' + y^3 = e^x$

② 導數非一次方，例如 $(y'')^{\frac{1}{3}} + y' + 2y = 0$，或 $y'' + (y')^2 + y = x$

③ 含有導數和應變數之相乘積項者，例如 $y'' + 2yy' + 5x = 0$

④ 含有應變數之非線性函數者，例如 $y'' + y' + \sin y = x^2$

(2) 線性微分方程式 (Linear differential equation)

微分方程式中所有應變數及導數均爲一次方，且無導數與應變數相乘積之項，亦無應變數之非線性函數者。

4. 解 (Solution)

由微分方程式中求出原應變數與自變數間之函數關係式，即爲微分方程

精選試題

一、 解 $3x(y^2+2)dx+y(x^2+3)dy=0$

解： 由分離變數法，原式除以 $(y^2+2)(x^2+3)$ 得

$$\frac{3x}{x^2+3}dx+\frac{y}{y^2+2}dy=0$$

積分之

$$\frac{3}{2}\ln(x^2+3)+\frac{1}{2}\ln(y^2+2)=c_1$$

$$3\ln(x^2+3)+\ln(y^2+2)=2c_1=k$$

取反對數

$$(x^2+3)^3(y^2+2)=e^k$$

通解爲

$$(x^2+3)^3(y^2+2)=c$$

二、 解 $x\frac{dy}{dx}-y=y^3$

解： 原式化爲

$$xdy-y(1+y^2)dx=0$$

除以$xy(1+y^2)$可分離變數爲

$$\frac{1}{y(1+y^2)}dy-\frac{1}{x}dx=0$$

分解爲部份分式

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{1+y^2}\right)dy-\frac{1}{x}dx=0$$

積分之

$$\ln|y|-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln|x|=k$$

$$\ln\frac{|y|}{|x|\sqrt{1+y^2}}=k$$

通解爲

$$\frac{y}{x\sqrt{1+y^2}}=c$$

或 $$y=cx\sqrt{1+y^2}$$

三、 求 $yy'+x=0$ 之通解，若 $y(1)=\sqrt{3}$，求其特解。

解： $$y\frac{dy}{dx}+x=0$$

分離變數

$$ydy+xdx=0$$

積分之

$$\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2=c_1$$

故通解為

$$x^2+y^2=c$$

上式為一組圓曲線

將$y(1)=\sqrt{3}$代入得

$$1^2+(\sqrt{3})^2=c$$

$$c=4$$

故特解為

$$x^2+y^2=4$$

四、 求 $xyy'=3y^2+2x^2$ 之通解，如 $y(1)=2$，求特解。

解： 原式除以 x^2 得

$$\left(\frac{y}{x}\right)y'=3\left(\frac{y}{x}\right)^2+2$$

令 $\frac{y}{x}=u$

則 $y=xu$

$$y'=u+xu'$$

代入得

$$u(u+xu')=3u^2+2$$

$$xuu'=2u^2+2$$